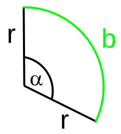
Kreis

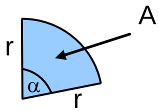
Länge eines Kreisbogens

$$\boxed{b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r}$$



Fläche eines Kreissektors

$$\boxed{A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2\pi}$$



Bogenmaß

- Bogenmaß des Winkels α: $\alpha_{\text{Bogenmaß}} = \frac{b}{r}$
- Umrechnungsformel: $\frac{\alpha_{\text{Bogenmaß}}}{2\pi} = \frac{\alpha_{\text{Gradmaß}}}{360^\circ}$

Kugel

Volumen

$$\boxed{V_K = \frac{4}{3} r^3\pi}$$

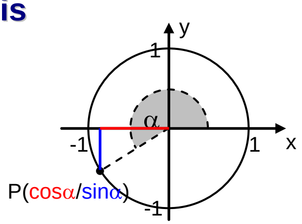
Oberflächeninhalt

$$\boxed{O_K = 4\pi r^2}$$

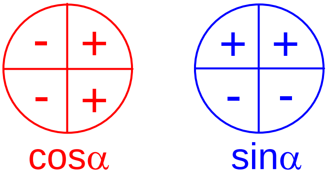
Trigonometrie

Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Der Kosinus eines Winkels α ist die x-Koordinate des zugehörigen Punktes P auf dem Einheitskreis.
Der Sinus eines Winkels α ist die y-Koordinate des zugehörigen Punktes P auf dem Einheitskreis.



- Vorzeichen in den Quadranten I-IV:



- Für **negative Winkel α**, d.h. für Winkel im Uhrzeigersinn gilt

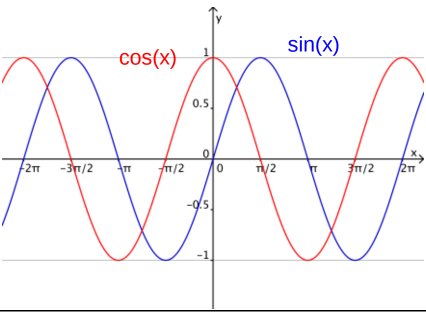
$$\boxed{\cos(\alpha) = \cos(-\alpha) \qquad \sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)}$$

Beispiele:

$$\cos(-225°) = \cos(225°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sin(-\frac{2}{3}\pi) = -\sin(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Sinus- und Kosinusfunktion



f(x) = sin(x) ID = IR
W = [-1;1], Periodenlänge 2π
punktsymmetrisch zu O(0/0)

f(x) = cos(x) ID = IR
W = [-1;1], Periodenlänge 2π
achsensymmetrisch zur y-Achse

Trigonometrie am allgemeinen Dreieck

- Sinussatz

In jedem Dreieck verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel.

Für ein Dreieck ABC ergibt sich demnach:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \qquad \frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}}$$

<u>Beachte</u>:
- anwendbar bei SWW (bzw. WSW) oder SsW
- Liefert einen gesuchten Winkel nie eindeutig!
  Z.B. Winkelsumme im Dreieck zusätzlich nötig.

- Kosinussatz

Die Summe der Quadrate der an einem Winkel anliegenden Seiten abzüglich dem doppelten Produkt dieser Seitenlängen und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels ergibt das Quadrat der diesem Winkel gegenüberliegenden Seite.

Für ein Dreieck ABC ergibt sich demnach:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha \\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma \end{aligned}}$$

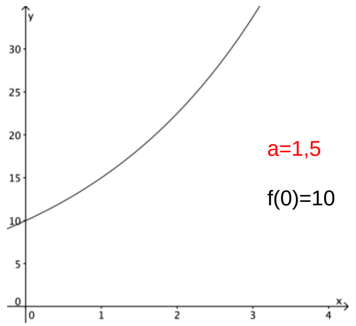
<u>Beachte</u>:
- anwendbar bei SSS oder SWS
- Liefert einen gesuchten Winkel immer eindeutig!

Exponentialfunktion und Logarithmus

Exponentielles Wachstum

In gleichen (Zeit-)schritten erhöht/ verringert sich der Bestand um den gleichen konstanten Wachstumsfaktor a.

$$\boxed{f(t+1) = a \cdot f(t)}$$



a > 1 : Exponentielles Wachstum
0 < a < 1 : Exponentielle Abnahme

Exponentialfunktion

$$\boxed{f(x) = f(0) \cdot a^x}$$

ID=IR

a: Wachstumsfaktor (a > 1; a ≠ 0)

f(0): Anfangswert

Logarithmus

Der Logarithmus ist die Lösung x der Exponentialgleichung

$$b = a^x \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$

Mit Worten: **Der Logarithmus von a zur Basis b ist diejenige Hochzahl x, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten**.

Schreibweise: $x = \log_a b$

Wichtige Zusammenhänge: $\log_a 1 = 0$ $\quad \log_a a = 1$

$$\log_a a^x = x \qquad a^{\log_a x} = x$$

Rechnen mit Logarithmen

Falls u > 0, v > 0, a > 0, a ≠ 1, b > 0, b ≠ 1 gelten folgende Regeln:

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v) \qquad \log_a(u^x) = x \cdot \log_a(u)$$

$$\log_a(u : v) = \log_a(u) - \log_a(v) \qquad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Schreibweise für den Zehnerlogarithmus: $\log_{10}(u) = \lg(u)$

Exponentialgleichungen

Zur Lösung bietet sich oft einer der beiden folgenden Wege an:

- Lösung durch Logarithmieren auf beiden Seiten mit einem Logarithmus beliebiger Basis

  Bsp. mit Zehnerlogarithmus:

$$5 \cdot 9^{2x} = 7 \cdot 2^{-x}$$
$$\lg(5 \cdot 9^{2x}) = \lg(7 \cdot 2^{-x})$$
$$\lg(5) + \lg(9^{2x}) = \lg(7) + \lg(2^{-x})$$
$$\lg(5) + \lg(9^{2x}) = \lg(7) + \lg(2^{-x})$$
$$\lg(5) + 2x \cdot \lg(9) = \lg(7) - x \cdot \lg(2)$$
$$2x \cdot \lg(9) + x \cdot \lg(2) = \lg(7) - \lg(5)$$
$$x \cdot (2 \cdot \lg(3^2) + \lg(2)) = \lg(7) - \lg(5)$$
$$x = \frac{\lg(7) - \lg(5)}{4 \cdot \lg(3) + \lg(2)} \approx 0{,}066$$

- Lösung durch Substitution

  Bsp.: $16^x + 8 = 6 \cdot 4^x$

  $(4^x)^2 - 6 \cdot 4^x + 8 = 0 \qquad (*)$

  Substitution (Ersetzung): $u = 4^x$

  Einsetzen in (*): $u^2 - 6u + 8 = 0$

Lösen der quadratischen Gleichung führt auf:

$u_1 = 4$ $u_2 = 2$

Resubstitution: $4^x = 4 \Rightarrow x_1 = 1$;

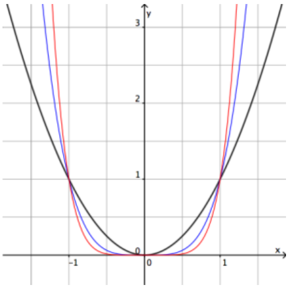
$4^x = 2 \Rightarrow x_2 = \log_4 2 = 0{,}5$

Ganzrationale Funktionen

Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

Die Funktionen $\boxed{f(x) = x^n}$ mit $ID_f = IR$ und $n \in IN$ heißen Potenzfunktionen mit natürlichem Exponent.

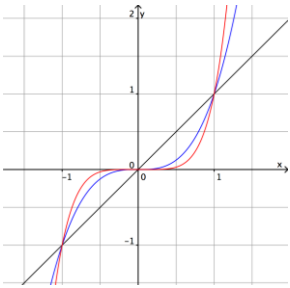
n gerade



achsensymmetrisch zur y-Achse

alle Funktionsgraphen gehen durch die Punkte (-1|1), (0|0), (1|1)

n ungerade



punktsymmetrisch zum Ursprung

alle Funktionsgraphen gehen durch die Punkte (-1|-1), (0|0), (1|1)

Eigenschaften ganzrationaler Funktionen

Die Funktionen $\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0}$ mit den Koeffizienten $a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ldots,\ a_1,\ a_0\ \in$ IR und $a_n \neq 0$ sowie $ID_f = IR$ heißen ganzrationale Funktionen.

- Grad der ganzrationalen Funktion

  Der höchste Exponent heißt Grad der ganzrationalen Funktion.

  Bsp: $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 6x + 1$ Grad: 3

- Charakteristischer Verlauf

  Der charakteristische Verlauf ist das Verhalten einer ganzrationalen Funktion für betragsmäßig sehr große x-Werte. Er wird durch den Summanden mit dem höchsten vorkommenden Exponenten durch Vergleich mit der zugehörigen Potenzfunktion bestimmt.

  Bsp: $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 6x + 1$ Potenzfunktion: $g(x) = -3x^3$

  $\Rightarrow$ Charakteristischer Verlauf: „von links oben nach rechts unten“

- Nullstellen

  - Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen
  - Ist eine Nullstelle x=a der ganzrationalen Funktion f(x) vom Grad n bekannt, so kann man schreiben: $\boxed{f(x) = (x-a)\cdot g(x)}$, wobei g(x) eine ganzrationale Funktion vom Grad n-1 ist.

  - Die Funktion g(x) kann man durch Polynomdivision erhalten:

Bsp: x = -1 ist eine Nullstelle der Funktion $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 6x + 1$

Polynomdivision:

$$\boxed{-3x^3 : x =}$$

$$(\boxed{-3x^3}+2x^2+6x+1):(\boxed{x}+1)=\boxed{-3x^2}+\boxed{5x}+1$$

$$\underline{-\boxed{(-3x^3-3x^2)}} \leftarrow (x+1)\cdot(-3x^2)$$

$$5x^2+6x \rightarrow \boxed{5x^2 : x =}$$

$$\underline{-\;5x^2+5x}$$

$$x+1$$

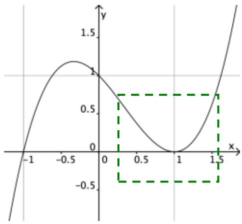
$$\underline{-\;x+1}$$

$$0$$

usw.

- Ist eine Nullstelle n mal vertreten, so spricht man von einer n-fachen Nullstelle.
  In einer Umgebung einer n-fachen Nullstelle ähnelt eine ganz-rationale Funktion f(x) einer Potenzfunktion mit Exponent n.

Bsp.: $f(x)=x^3-x^2-x+1=(x+1)\cdot(x-1)^2$



besitzt eine doppelte Nullstelle bei x = 1.

In einer Umgebung von x = 1 ähnelt der Graph einer Parabel.

- Faktorisierte Form

Wenn man alle Nullstellen einer Funktion einschließlich ihrer Vielfachheiten kennt, so kann man den Funktionsterm in faktorisierter Form angeben. Der Koeffizient a_n muss allerdings als Vorfaktor mit berücksichtigt werden.

Beispiel: $f(x)=0{,}1x^4-0{,}3x^3-0{,}3x^2+1{,}1x-0{,}6$

Nullstellen: $x_1 = -2$ (einfach), $x_2 = 3$ (einfach)
$x_3 = 1$ (doppelt)

Faktorisierte Form:

$$f(x)=0{,}1\cdot(x+2)\cdot(x-1)^2\cdot(x-3)$$

Symmetrie von Funktionsgraphen

Achsensymmetrie zur y-Achse	Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung
$\boxed{f(-x) = f(x)}$	$\boxed{f(-x) = -f(x)}$

Beispiel: Der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
Nachweis: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

Spezialfall:

Ganzrationale Funktionen sind genau dann achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn **alle Exponenten gerade** sind.

Ganzrationale Funktionen sind genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn **alle Exponenten ungerade** sind.

Grenzwerte im Unendlichen

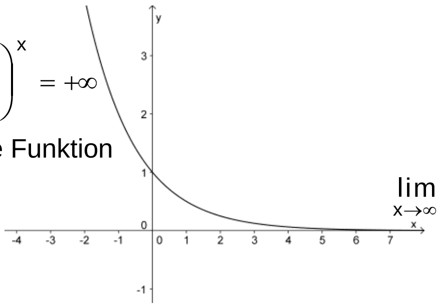
Diejenige Zahl a, welcher eine Funktion für beliebig große x-Werte beliebig nahe kommt, nennt man den

Grenzwert der Funktion f für x gegen plus unendlich.

Schreibweise: $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a}$ lim steht für „Limes“ (lat. Grenze)

Beispiel: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$

d.h heißt, die Funktion divergiert



$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$

Lineare Transformationen von Funktionen

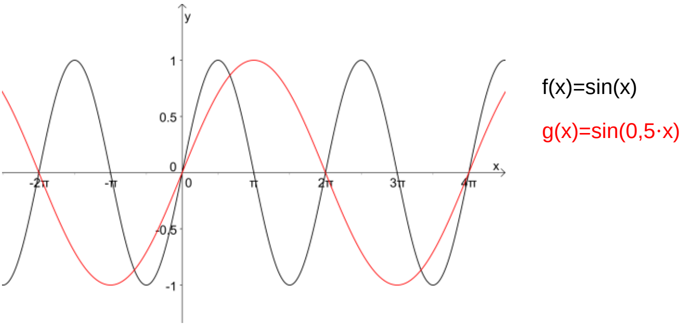
Gegeben: Funktion $f(x)$ mit dem Graph G_f. **Beispiel**: f(x) = sin(x)

Streckung parallel zur x-Achse

Neuer Funktionsterm: $g(x) = f(b \cdot x)$

(b>1: Stauchung b<1: Streckung)

Beispiel:



Beachte: Der Streckfaktor beträgt $\frac{1}{b}$.

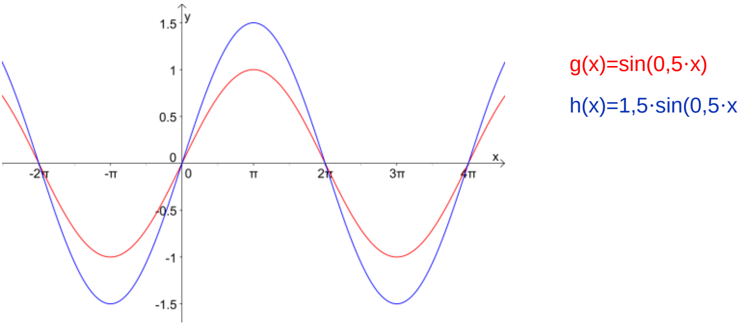
Spezialfall: b = -1: Spiegelung an der y-Achse

Streckung parallel zur y-Achse

Neuer Funktionsterm: $h(x) = a \cdot f(b \cdot x)$

(a>1: Streckung a<1: Stauchung)

Beispiel:



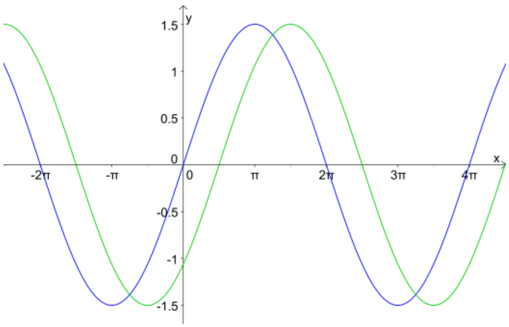
Beachte: Der Streckfaktor beträgt a.
Spezialfall: a = -1: Spiegelung an der x-Achse

Verschiebung parallel zur x-Achse

Neuer Funktionsterm: $i(x) = a \cdot f(b \cdot (x - c))$

c>0: Verschiebung um |c| nach rechts
c<0: Verschiebung um |c| nach links

Beispiel:



h(x)=1,5·sin(0,5·x

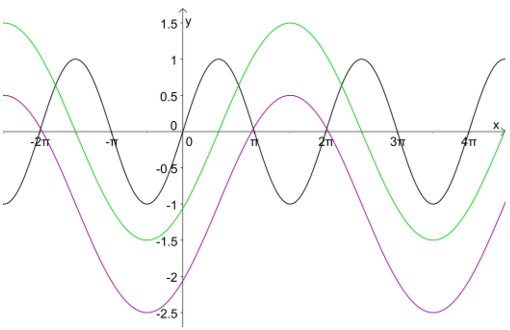
i(x)=1,5·sin(0,5·(x-π/2))

Verschiebung parallel zur y-Achse

Neuer Funktionsterm: $j(x) = a \cdot f(b \cdot (x - c)) + d$

d>0: Verschiebung um |d| nach oben
d<0: Verschiebung um |d| nach unten

Beispiel:



f(x)=sin(x)

i(x)=1,5·sin(0,5·(x-π/2))

j(x)=1,5·sin(0,5·(x-π/2))-1

Stochastik

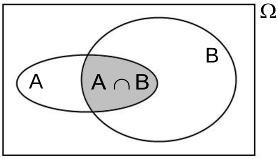
Vierfeldertafel

A und B bezeichnen zwei Ereignisse, $\overline{A}$ und $\overline{B}$ die jeweiligen Gegenereignisse.

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	$P(\Omega)$

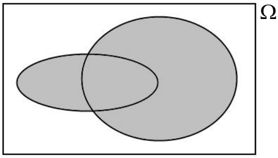
$A \cap B$ ist die Schnittmenge von A und B:

sprich „A und B“



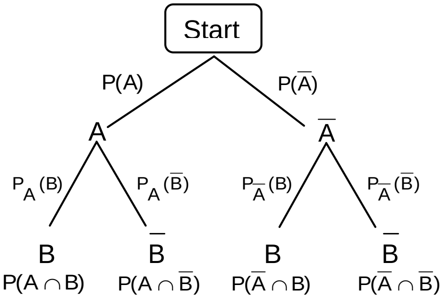
$A \cup B$ ist die Vereinigungsmenge von A und B:

sprich „A oder B“



Merke: $P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)$

Baumdiagramm und Bedingte Wahrscheinlichkeit



Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Beachte: Bedingte Wahrscheinlichkeiten stehen nicht in der Vierfeldertafel!