Rechnen mit Quadratwurzeln

Die Quadratwurzel

- Die **Quadratwurzel** $\sqrt{x}$ ist diejenige nicht-negative Zahl, welche zum Quadrat genommen die Zahl x ergibt:

$$\boxed{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x}$$

Die Zahl x, die unter der Wurzel steht, heißt **Radikand**.

Merke: Der Radikand ist nicht-negativ!

- Manche Quadratwurzeln sind **irrationale Zahlen**, d.h. Zahlen, deren Dezimalbrüche unendlich viele Nachkommastellen, jedoch keine Periode besitzen.

Die Menge der reellen Zahlen ℝ setzt sich zusammen aus der Menge der rationalen Zahlen ℚ und der Menge der irrationalen Zahlen.

Rechenregeln

a) $\sqrt{x\cdot y}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$ anwendbar falls x, y ≥ 0

b) $\sqrt{x:y}=\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{x}:\sqrt{y}$ anwendbar falls x ≥ 0 und y > 0

c) **Teilweises Radizieren**

Beispiel: $\sqrt{x^5}=\sqrt{x^4\cdot x}=x^2\cdot\sqrt{x}$ anwendbar falls x ≥ 0

d) **Unter die Wurzel ziehen**

$$4\sqrt{5}=\sqrt{4^2\cdot 5}=\sqrt{80} \qquad b\sqrt{b^4+9}=\sqrt{b^2\cdot(b^4+9)}$$

$$-3\sqrt{a+1}=-\sqrt{3^2\cdot(a+1)}$$

Merke: Das Minus bleibt draußen!

Potenzen mit rationalen Exponenten

Die n-te Wurzel

Die n-te Wurzel aus a ist diejenige **nicht-negative** Zahl, die man hoch n nehmen muss, um a zu erhalten. Hierbei ist n immer eine **natürliche** Zahl und a **nicht-negativ**.
z.B. Dritte Wurzel aus a:

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=a\text{, d.h. }\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a$$

$$\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}}$$

Potenzen mit rationalen Exponenten

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}=\left(\sqrt[q]{a}\right)^p}$$

hierbei ist a ≥ 0, p ∈ ℤ, q ∈ ℕ

Beispiele:

$$a^{\frac{2}{3}}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2=\left(\sqrt[3]{a}\right)^2=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}$$

$$a^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$

$$2^{-3}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}=\tfrac{1}{8}+2=2\tfrac{1}{8}$$

$$27^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{27}\right)^2=3^2=9$$

Quadratische Funktionen und Gleichungen

Quadratische Funktionen

Jede quadratische Funktion

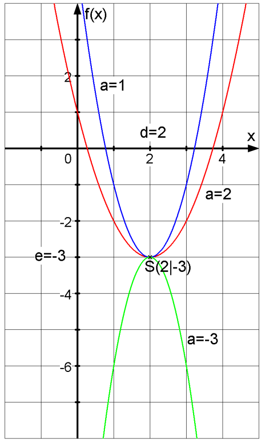
$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a \neq 0$$

kann durch **quadratische Ergänzung** in die Scheitelform

$$f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$$

übergeführt werden.

Der Funktionsgraph einer quadratischen Funktion ist immer eine **Parabel**. Der höchste bzw. tiefste Punkt der Parabel heißt **Scheitelpunkt** S der Parabel.



$f_1(x) = 2(x-2)^2 - 3$

$f_2(x) = 1 \cdot (x-2)^2 - 3$

$f_3(x) = -3(x-2)^2 - 3$

Quadratische Gleichungen

Jede quadratische Gleichung muss auf die

NORMALFORM $ax^2 + bx + c = 0$

gebracht werden!

Die Lösungen der quadratischen Gleichung erhält man mit der **MITTERNACHTSFORMEL:**

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Die Anzahl der Lösungen erhält man mit der **DISKRIMINANTE D**:

$$\boxed{D = b^2 - 4ac}$$

D<0 bedeutet keine Lösung
D=0 bedeutet genau eine Lösung
D>0 genau zwei Lösungen.

Lösung linearer Gleichungssysteme mit drei Unbekannten

I	$2a + 3b - c = -6$	$\Rightarrow c = 2a + 3b + 6$
II	$-a + b + 2c = 1$	
III	$3a + 3b + c = -1$	
in II	$-a + b + 2 \cdot (2a + 3b + 6) = 1$	
in III	$3a + 3b + (2a + 3b + 6) = -1$	
I'	$3a + 7b + 12 = 1$	
II'	$5a + 6b + 6 = -1$	

Das verbleibende lineare Gleichungssystem mit zwei Unbekannten löst man mit einem der Verfahren aus der 8. Jahrgangsstufe (Einsetzverfahren oder Additionsverfahren)

Mehrstufige Zufallsexperimente

Beispiele mehrmaliges Werfen eines Würfels hintereinander, gleichzeitiges Werfen von mehreren Würfeln, Ziehen von Kugeln aus einer Urne mit oder ohne Zurücklegen.

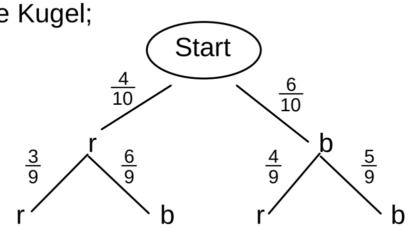
- 1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad zu diesem Ereignis.

- 2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die zu diesem Ereignis führen.

Beispiel: Urneninhalt 4 rote und 6 blaue Kugel;
Zweimaliges Ziehen ohne Zurücklegen

P(„genau eine Kugel ist rot“) =

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$



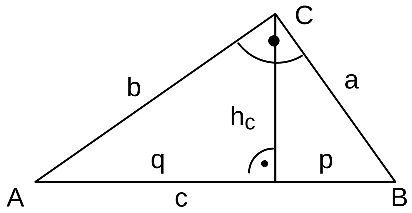
Satzgruppe des Pythagoras

Merke: Die Satzgruppe des Pythagoras ist nur auf rechtwinklige Dreiecke anwendbar!

Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$

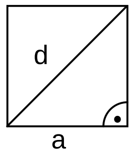
Höhensatz $h_c^{\ 2} = q \cdot p$

Kathetensatz $a^2 = c \cdot p \qquad b^2 = c \cdot q$

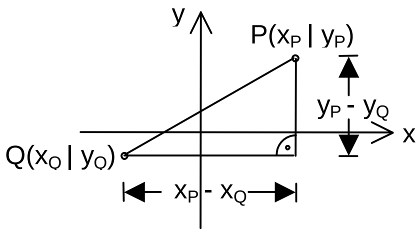


Anwendungen:

- Diagonale im Quadrat: $d = \sqrt{2} \cdot a$
-
- Entfernung zweier Punkte $P(x_P | y_P)$ und $Q(x_Q | y_Q)$:



$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$



Binomische Formeln

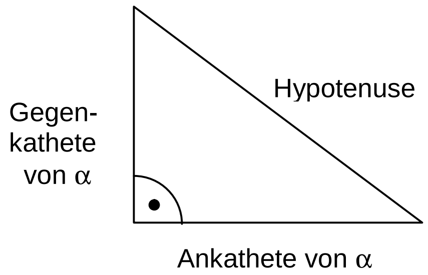
Plus-Formel:	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Minus-Formel:	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Plusminus-Formel:	$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Trigonometrie

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$



Schreibweise: $\sin\alpha = \sin(\alpha) \qquad \sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$

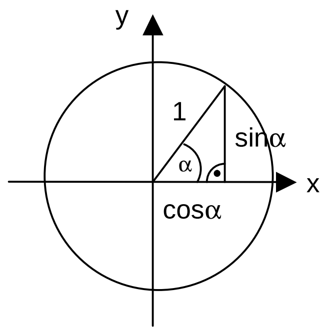
Beziehungen:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

(„Trigonometrischer Pythagoras“)

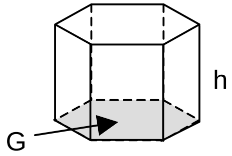


Raumgeometrie

Prisma

Volumen:

$$\boxed{V = G \cdot h}$$



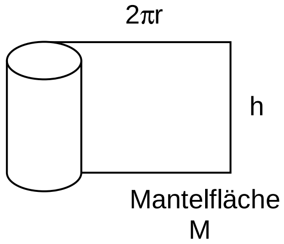
Zylinder

Volumen:

$$\boxed{V_Z = G \cdot h = r^2\pi \cdot h}$$

Mantelfläche:

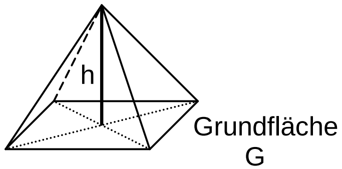
$$\boxed{M = U_K \cdot h = 2\pi r \cdot h}$$



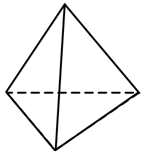
Pyramide

Volumen:

$$\boxed{V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h}$$



Merke: Eine Pyramide mit vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen nennt man **gleichseitiges Tetraeder**.



Kegel

Volumen:

$$\boxed{V_K = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot h}$$