Funktionen

Eine **Funktion** f ist eine **eindeutige Zuordnung**. Jeder Zahl x aus dem Definitionsbereich wird eindeutig ein Funktionswert y zugeordnet. Den y-Wert erhält man, wenn man den x-Wert in den Funktionsterm einsetzt: y = f(x). **Bsp**.: y = ax + b

Der **Graph** der Funktion entsteht, wenn alle zur Funktion gehörenden Zahlenpaare $(x \mid y)$ in ein Koordinatensystem gezeichnet werden.

Ein Punkt liegt auf dem Funktionsgraphen, wenn seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

Die **Nullstellen** einer Funktion sind die Punkte, bei denen der y-Wert 0 ist. Berechne also die x-Werte, für die gilt: y = f(x) = 0. Nullstellen sind die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der x-Achse.

Lineare Funktionen

Proportionale Zuordnungen

Bei einer (direkt) proportionalen Zuordnung wird dem n-fachen der einen Größe das n-fache der anderen Größe zugeordnet.

Zuordnungsvorschrift: $x \mapsto y = m \cdot x$

Alle Zahlenpaare $(x \mid y)$ sind **quotientengleich**: $\frac{y}{x} = m$

Der Quotient m heißt **Proportionalitätsfaktor**.

Als Graph ergibt sich eine **Ursprungsgerade**.

Lineare Funktionen

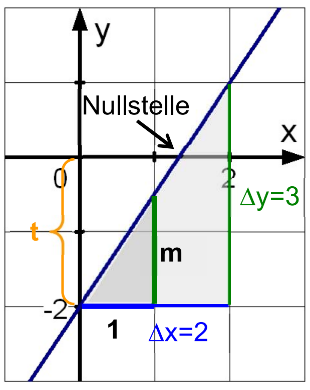
Zuordnungsvorschrift (Funktionsgleichung):
$f: x \mapsto y = m \cdot x + t$

m: Steigung t: (y-) Achsenabschnitt

- Für $m > 0$ ist die Gerade steigend, für $m < 0$ ist sie fallend.
- Je größer |m| ist, desto steiler ist die Gerade.

Berechnung der Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Bsp.: $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$



Besondere Geraden

- $y = -\frac{4}{3}x$ Ursprungsgerade (Steigung $-\frac{4}{3}$)
- $y = x$ Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten
- $y = -x$ Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten
- $y = 3{,}5$ Parallele zur x-Achse (bei $y = 3{,}5$)
- $x = -2$ Parallele zur y-Achse (**keine Funktion!**)

Gebrochen rationale Funktionen

Umgekehrt proportionale Zuordnungen

Bei einer umgekehrt (indirekt) proportionalen Zuordnung wird dem n-fachen der einen Größe der n-te Teil der anderen Größe zugeordnet.

Zuordnungsvorschrift: $x \mapsto y = \frac{p}{x}$

Alle Zahlenpaare $(x \mid y)$ sind **produktgleich**: $x \cdot y = p$
Als Graph ergibt sich eine **Hyperbel**.

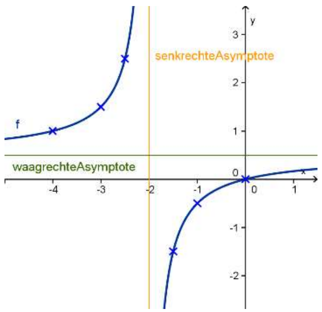
Gebrochen rationale Funktionen

Beispiele: $f_1(x) = \frac{4}{x}$; $f_2(x) = \frac{3x}{x+2}$; $f_3(x) = \frac{2-x}{x^2}$;

Definitionsmenge: Alle Werte der Grundmenge, für die der Nenner nicht 0 ist: $D_{f_1} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $D_{f_2} = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$; $D_{f_3} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$;

Die x-Werte, bei denen der Nenner 0 ist, heißen **Definitionslücken**. Bei einer Definitionslücke hat der Graph gewöhnlich eine **senkrechte Asymptote**.

Für sehr große und sehr kleine x-Werte ($x \to +\infty$ und $x \to -\infty$) nähert sich der Graph gewöhnlich einer **waagrechten Asymptote** an.



Bsp.: $f(x) = \frac{x}{2x+4}$;

Definitionslücke: $2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$;

$f(1000) = \frac{1000}{2004} \approx 0{,}5 \Rightarrow$ Waagr. As.: $y = 0{,}5$

x	-4	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	0
f(x)	1	1,5	2,5	n.d.	-1,5	-0,5	0

Bruchterme und Bruchgleichungen

Kürzen

Bsp.: $\frac{2x^2 - 6x}{12x^2 - 4x^3}$ D = Q \ {0; 3}

ausklammern $\frac{2x(x-3)}{4x^2(3-x)} = \frac{2x(x-3)}{-2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot (x-3)}$

Kürzen $= \frac{1}{-2x} = -\frac{1}{2x}$

Addieren und subtrahieren

Bsp.: $\frac{1}{2x} + \frac{1{,}5}{x-2}$ D = Q \ {0; 2}

Hauptnenner bestimmen HN: $2x(x-2)$

erweitern $\frac{1 \cdot (x-2)}{2x(x-2)} + \frac{1{,}5 \cdot 2x}{2x(x-2)}$

Zähler addieren $= \frac{x - 2 + 3x}{2x(x-2)} = \frac{4x-2}{2x(x-2)}$

ausklammern und kürzen $= \frac{2(2x-1)}{2x(x-2)} = \frac{2x-1}{x(x-2)}$

Multiplizieren und dividieren

Bsp. 1: $6 \cdot \frac{x+1}{2} = \frac{6 \cdot (x+1)}{2} = 3 \cdot (x+1) = 3x + 3$;

Bsp. 2: $\frac{x-3}{x} : \frac{x-3}{2} = \frac{x-3}{x} \cdot \frac{2}{x-3} = \frac{(x-3) \cdot 2}{x \cdot (x-3)} = \frac{2}{x}$; D=Q\{0;3}

Lösen von Bruchgleichungen

Prinzip: Die Variable muss aus dem Nenner entfernt werden. Das geht meist durch „Überkreuzmultiplikation“ oder durch Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner. **Probe!**

Bsp.: $\frac{3}{x} = \frac{-2}{x-4}$; Überkreuzmult.:

$3 \cdot (x-4) = -2 \cdot x; \Rightarrow x = 2{,}4$

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Ergebnismenge, Ereignis

Zufallsexperiment (ZE): Experiment, dessen Ausgang vom Zufall bestimmt ist, z.B. Würfelwurf.
Ergebnismenge Ω eines ZE: alle möglichen Ausgänge des ZE.

Bsp.: Würfelwurf:	Ω = {1;2;3;4;5;6} **Mächtigkeit**:	$\lvert\Omega\rvert = 6$
Zweifacher Münzwurf:	Ω = {WW; WZ; ZW; ZZ}	$\lvert\Omega\rvert = 4$

Ereignis: Teilmenge der Ergebnismenge eines ZE.

Bsp.: ZE Würfelwurf, Ω = {1;2;3;4;5;6}
Ereignis A: „Augenzahl gerade": A = {2;4;6}; |A| = 3

Gegenereignis $\overline{A}$: Tritt ein, wenn A nicht eintritt. (gesprochen: Nicht A oder Gegenereignis von A.)

Wahrscheinlichkeit

Laplace-Experiment: ZE, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind.

Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A bei Laplace-Experimenten gilt:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Zahl der günstigen Fälle}}{\text{Zahl der möglichen Fälle}}$$

- Gegenereignis: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Unmögliches Ereignis: $P(\{\}) = 0$
- Sicheres Ereignis: $P(\Omega) = 1$

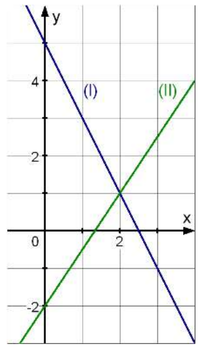
Produktregel

Fakultät: Das Produkt $3 \cdot 2 \cdot 1$ wird abgekürzt mit 3! („drei Fakultät").
Es gibt die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten von 3 Objekten an.
Zählprinzip/Produktregel: Werden mehrere ZE ausgeführt, so ist die Gesamtzahl der Möglichkeiten das Produkt aus den Möglichkeiten der einzelnen ZE.

Lineare Gleichungssysteme

Bsp.: (I) $2x + y = 5$
(II) $-3x + 2y = -4$

Zeichnerische Lösung



Löse nach y auf: (I) $y = -2x + 5$
(II) $y = \frac{3}{2}x - 2$

- Lösungen der Gleichung (I) sind alle Zahlenpaare $(x \mid y)$, die auf der Geraden $y = -2x + 5$ liegen.
- Lösungen der Gleichung (II) sind alle Zahlenpaare $(x \mid y)$, die auf der Geraden $y = \frac{3}{2}x - 2$ liegen.
- Lösung des Gleichungssystems ist der Schnittpunkt der beiden Geraden: x=2, y=1

Rechnerische Lösung: Einsetzverfahren

Prinzip: Löse eine Gleichung nach einer Variablen auf und setze das Ergebnis in die andere Gleichung ein.
(I) $2x + y = 5$
(II) $-3x + 2y = -4$

(I) nach y auflösen:	(I') y	= 5 – 2x
In (II) einsetzen:	– 3x + 2(5 – 2x)	= – 4;
	– 3x + 10 – 4x	= – 4; | – 10
	– 7x	= – 14; | : (– 7)
	x	= 2;
In (I') einsetzen:	y	= 5 – 2·2;
	y	= 1;

Lösung: x = 2; y = 1;

Rechnerische Lösung: Additionsverfahren

Prinzip: Addiere/subtrahiere die Gleichungen (oder Vielfache der Gleichungen) so, dass eine Variable wegfällt.

$$
\begin{array}{rrl}
\text{(I)} & 2x + y & = 5; \\
\text{(II)} & -3x + 2y & = -4; \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrl}
2\cdot\text{(I)} & 4x + 2y & = 10; \\
-1\cdot\text{(II)} & 3x - 2y & = 4; \\
\hline
2\cdot\text{(I)} + (-1)\cdot\text{(II)} & 7x & = 14;\ |\ :7 \\
 & x & = 2; \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrl}
3\cdot\text{(I)} & 6x + 3y & = 15; \\
2\cdot\text{(II)} & -6x + 4y & = -8; \\
\hline
2\cdot\text{(I)} + (-1)\cdot\text{(II)} & 7y & = 7;\ |\ :7 \\
 & y & = 1;
\end{array}
$$

Hinweis: Wenn die Lösung der einen Variablen bekannt ist, kann die zweite Variable auch durch Einsetzen in eine der Gleichungen berechnet werden.

Spezialfälle

- Wenn die beiden zum Gleichungssystem gehörenden Geraden **parallel** sind, dann gibt es **keine Lösung**: $L = \{\}$. Beim rechnerischen Lösungsversuch ergibt sich ein **Widerspruch** (z.B. $-3 = 0$).
- Wenn die beiden zum Gleichungssystem gehörenden Geraden **gleich** sind, dann gibt es **unendlich viele Lösungen**, nämlich alle Punkte auf den Geraden. Beim rechnerischen Lösungsversuch ergibt sich eine **allgemeingültige Aussage** (z.B. $-3 = -3$).

Kreis: Umfang, Flächeninhalt

r: Radius d: Durchmesser

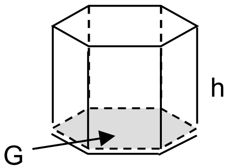
Umfang: $u = 2r\pi = d \cdot \pi$

Flächeninhalt: $A = r^2\pi$

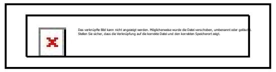
Raumgeometrie

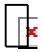
Prisma

Volumen: $\boxed{V = G \cdot h}$



Zylinder

Volumen: 


Mantelfläche: