Brüche

Bruchteile und Anteile

Teilt man ein Ganzes in n gleiche Teile und nimmt z viele davon, beträgt der Anteil, den dieser Bruchteil am Ganzen ausmacht $\frac{z}{n}$.

- Bsp.: $\frac{5}{6} von\ 300\ kg = (300\ kg : 6) \cdot 5 = 50\ kg \cdot 5 = 250\ kg$
  ($\frac{5}{6}$ ist der Anteil, 300 kg das Ganze und 250 kg der Bruchteil)

Erweitern und Kürzen

- Erweitern: Man multipliziert Zähler und Nenner mit der gleichen natürlichen Zahl. Bsp.: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$
- Kürzen: Man dividiert Zähler und Nenner durch die gleiche natürliche Zahl. Bsp.: $\frac{14}{21} = \frac{14:7}{21:7} = \frac{2}{3}$
- Brüche ändern ihren Wert beim Kürzen und Erweitern nicht!

Arten von Brüchen

Echter Bruch: $\frac{3}{14}$, unechter Bruch: $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$, Scheinbruch: $\frac{9}{3} = 3$

Unechte Brüche können als gemischte Zahl, Scheinbrüche als ganze Zahl geschrieben werden!

Vergleichen von Brüchen

Um Brüche zu vergleichen, kann man sie gleichnamig machen oder man bringt sie auf den gleichen Zähler.

Bsp.: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}, \frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ also $\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$; $\frac{4}{5}, \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ also $\frac{4}{5} > \frac{4}{6}$

Dezimalbrüche

Bei der Dezimalschreibweise bedeutet die 1. (2., 3., ...) Stelle hinter dem Komma Zehntel, (Hundertstel, Tausendstel, ...).
Man unterscheidet endliche Dezimalbrüche (z.B. $3{,}76$) und unendliche (periodische) Dezimalbrüche (z.B. $5,\overline{65}$). Die Ziffergruppe unter dem Querstrich heißt Periode, die Anzahl der Ziffern Periodenlänge.

Vergleichen von Dezimalbrüchen

Man vergleicht zwei Dezimalbrüche, indem man von links beginnend jeweils die Ziffern eines bestimmten Stellenwerts vergleicht. Sobald eine Zahl eine größere Ziffer aufweist, ist sie die größere.

Z.B.: $3{,}4567 > 3{,}4566$, denn an der Zehntausendstel-Stelle hat die erste Zahl erstmals eine größere Ziffer.

Umwandlung von Brüchen in Dezimalbrüche

Man erweitert so, dass im Nenner eine Zehnerpotenz steht oder dividiert den Zähler durch den Nenner (Divisionsverfahren).

Bsp.: $\frac{8}{5} = \frac{16}{10} = 1{,}6$ oder

```
8:5=1,6
5
30
30
 /
```

Wiederholt sich ein Rest beim Divisionsverfahren, erhält man einen periodischen Dezimalbruch (z.B. $0,\overline{73}$).

Umwandlung von Dezimalbrüchen in Brüche

Endlicher Dezimalbruch: Die Ziffern wandern in den Zähler, der Nenner entspricht dem Wert der letzten Nachkommastelle: $0{,}456 = \frac{456}{1000}$
(Rein-)Periodischer Dezimalbruch: Die Ziffern wandern in den Zähler, die Periodenlänge legt die Anzahl der 9er im Nenner fest: $0,\overline{45} = \frac{45}{99}$

Addition und Subtraktion von Brüchen

Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Regel: Bei Brüchen mit gleichen Nennern werden die Zähler addiert (subtrahiert) und die Nenner beibehalten:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Brüche mit verschiedenen Nennern erweitert man zuvor auf einen gemeinsamen Nenner (Hauptnenner). Z.B.:

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{16}=\frac{4}{16}+\frac{5}{16}=\frac{9}{16}; \qquad \frac{5}{6}-\frac{3}{14}=\frac{35}{42}-\frac{9}{42}=\frac{26}{42}=\frac{13}{21}$$

Ermittlung eines gemeinsamen Nenners

Das kgV beider Nenner ist eine geschickte Wahl für einen Hauptnenner.

Bsp.: $\frac{4}{15}+\frac{3}{12}$ N.R.: $kgV(15,12)=\mathbf{60} \rightarrow \frac{4}{15}+\frac{3}{12}=\frac{16}{\mathbf{60}}+\frac{15}{\mathbf{60}}=\frac{31}{60}$

(Das kgV findet man über die Primfaktorzerlegung der Nenner oder man geht die Vielfachen der größeren Zahl durch, bis die kleinere „reinpasst".)

Addieren und Subtrahieren gemischter Zahlen

Zunächst müssen, falls nötig, die Brüche gleichnamig gemacht werden. Dann addiert bzw. subtrahiert man die Ganzen und die Brüche getrennt voneinander und fasst zusammen.

Addition: $2\frac{2}{3}+3\frac{1}{2}=2\frac{4}{6}+3\frac{3}{6}=5\frac{7}{6}=6\frac{1}{6}$

Subtraktion: $5\frac{1}{4}-2\frac{3}{4}=4\frac{5}{4}-2\frac{3}{4}=2\frac{2}{4}=2\frac{1}{2}$

Alternative: Man wandelt die gemischten Zahlen in unechte Brüche um und rechnet mit diesen.

Addieren und Subtrahieren von Dezimalbrüchen

Wie bei den ganzen Zahlen wird auch bei Dezimalbrüchen stellenweise addiert bzw. subtrahiert. Der Stellenwert der Ziffern wird durch das Komma festgelegt. Beim Untereinanderschreiben bedeutet dies, dass Komma unter Komma stehen muss.

Multiplikation und Division

Multiplikation eines Bruches mit einer natürlichen Zahl

Multipliziere den Zähler mit der natürlichen Zahl und behalte den Nenner bei.

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}$$

Beispiel: $9\cdot\frac{5}{6}=\frac{9\cdot 5}{6}=\frac{3\cdot 5}{2}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$

Division eines Bruches durch eine natürliche Zahl

Multipliziere den Nenner mit der natürlichen Zahl und behalte den Zähler bei.

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b\cdot c}\ (b,c\neq 0)$$

Beispiel: $\frac{6}{7}:3=\frac{6}{7\cdot 3}=\frac{2}{7\cdot 1}=\frac{2}{7}$

Multiplikation zweier Brüche

Multipliziere Nenner mit Nenner und Zähler mit Zähler.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Beispiel: $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 3}{7\cdot 4}=\frac{1\cdot 3}{7\cdot 2}=\frac{3}{14}$

Vor dem Multiplizieren in Zähler und Nenner ist, soweit möglich, zu kürzen. Hierbei kann auch „über Kreuz" gekürzt werden! **Faktoren in gemischter Schreibweise sind vor dem Multiplizieren als Brüche zu schreiben.**

Division zweier Brüche

Multipliziere den Dividenden mit dem Kehrbruch des Divisors.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\ (b,c,d\neq 0)$$

Beispiel: $\frac{2}{3}:\frac{5}{9}=\frac{2\cdot 9}{3\cdot 5}=\frac{2\cdot 3}{1\cdot 5}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$

Multiplikation von Dezimalbrüchen

Multipliziere zunächst ohne Berücksichtigung der Kommas. Setze das Komma so, dass das Ergebnis ebenso viele Stellen hinter dem Komma hat, wie die beiden Faktoren zusammen, Bsp.: $0{,}4\cdot 0{,}03=0{,}012$

Gegensinnige Kommaverschiebung ändert den Wert des Produkts nicht, Bsp.: $0{,}005\cdot 2000=5\cdot 2=10$

Division von Dezimalbrüchen

Verschiebe das Komma bei beiden Zahlen so weit nach rechts (gleichsinnige Kommaverschiebung), bis der Divisor eine natürliche Zahl ist, und führe dann eine schriftliche Division durch. Setze beim Überschreiten des Kommas des Dividenden auch im Ergebnis ein Komma. Das Ergebnis einer Division kann auch ein periodischer Dezimalbruch sein. Das erkennst du, wenn sich beim Divisionsverfahren ein Rest wiederholt.

Beispiel:
```
0,054:0,45=
 5,4:45=0,12
-4 5
   90
  -90
    /
```

Rationale Zahlen

Zahlenmengen

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ enthält alle Zahlen, die sich als Quotient zweier Zahlen, also als Bruch schreiben lassen. Hierzu zählen alle positiven und negativen Brüche und somit auch die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ (denn z.B. $-4 = -\frac{4}{1}$) und damit auch die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (denn z.B. $3 = \frac{6}{2}$). Endliche und periodische Dezimalbrüche sind ebenfalls rationale Zahlen.

Rechnen mit rationalen Zahlen

Für das Rechnen mit rationalen Zahlen gelten die gleichen Regeln wie beim Rechnen mit natürlichen bzw. ganzen Zahlen:

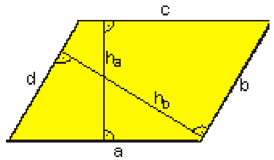
- Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich („KlaPoPuStri“)
- **Kommutativgesetz** (KG): $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$
- **Assoziativgesetz** (AG): $a + (b + c) = (a + b) + c$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- **Distributivgesetz** (DG): $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $a + (-b) = a - b$ (“Plus Minus gibt Minus“)
- $a - (-b) = a + b$ (“Minus Minus gibt Plus”)
- „Minus mal/durch Minus gibt Plus“, „Plus mal/durch Plus gibt Plus“, „Minus mal/durch Plus gibt Minus“, „Plus mal/durch Minus gibt Minus“

Flächeninhalt von Parallelogramm, Dreieck und Trapez

Flächeninhalt von Parallelogrammen

Beim Parallelogramm bezeichnet man den Abstand zweier paralleler Seiten als **Höhe.** In jedem Parallelogramm gibt es zwei Höhen.

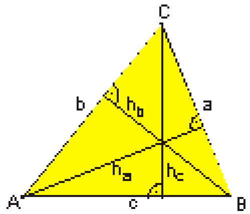
Für den **Flächeninhalt des Parallelogramms** gilt: $A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$



Parallelogramme, die in einer Seite und der dazugehörigen Höhe übereinstimmen, haben den gleichen Flächeninhalt.

Flächeninhalt von Dreiecken

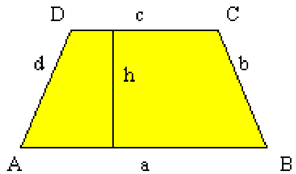
Das Lot von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seite heißt **Höhe** im Dreieck. In jedem Dreieck gibt es drei Höhen. Für den **Flächeninhalt des Dreiecks** gilt: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$



Dreiecke, die in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen, haben den gleichen Flächeninhalt.

Flächeninhalt von Trapezen

Ein Viereck mit zwei zueinander parallelen Seiten nennt man ein Trapez. Den Abstand der zueinander parallelen Seiten bezeichnet man als **Höhe** des Trapezes. Die beiden anderen Seiten bezeichnet man als **Schenkel** des Trapezes.



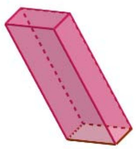
Für den **Flächeninhalt des Trapezes** gilt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

Netze und Oberflächeninhalt

Der Oberflächeninhalt eines Körpers ist gleich dem Flächeninhalt seines Netzes, also die Summe der Flächeninhalte aller begrenzenden Flächen:

Die Oberfläche einer Pyramide setzt sich aus ihrer Grundfläche und mehreren Dreiecken zusammen. Die Anzahl der Dreiecke entspricht der Anzahl der Seiten der Grundfläche (hier 4, da die Grundfläche ein Viereck ist).



Die Oberfläche eines Prismas setzt sich aus den deckungsgleichen Grund- und Deckflächen sowie mehreren Parallelogrammen zusammen.

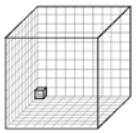
Volumen

Volumen:

Messen heißt vergleichen. V=5cm³ bedeutet: Der Körper hat das fünffache Volumen eines Zentimeterwürfels.

Volumeneinheiten:

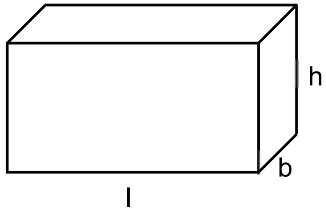
Zur Volumenmessung verwenden wir Würfel mit den Kantenlängen
1mm, 1cm, 1dm 1m.
Sie haben die Volumina: $1mm^3$, $1cm^3$, $1dm^3$ $1m^3$.
Für Umrechnungen gilt:
$1m^3 = 10dm \cdot 10dm \cdot 10dm = 1000dm^3$
$1dm^3 = 1000cm^3$
$1cm^3 = 1000mm^3$



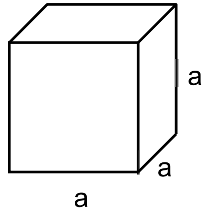
Flüssigkeitsmengen werden oft in den Einheiten ml, l und hl gemessen.
Es gilt: $1l = 1dm^3$
und $1hl = 100\,l$ und $1ml = \frac{1}{1000}\,l = 1cm^3$

Volumen des Quaders :

Quader: $V = l \cdot b \cdot h$



Würfel: $V = a \cdot a \cdot a = a^3$



Man gibt zunächst Länge, Breite und Höhe des Quaders in der gleichen Einheit an.

Volumen verschiedener Körper:

Das Volumen eines Körpers lässt sich rechnerisch bestimmen, indem er

- in Quader zerlegt wird,
- geeignet zerlegt und neu zu einem Quader zusammengesetzt wird oder
- durch Hinzufügen von Quadern zu einem Quader ergänzt wird.

Prozentrechnung, Daten und Diagramme

Prozentbegriff

Prozent ist eine andere Bezeichnung für Hundertstel: $60\% = \frac{60}{100} = 0{,}6$

Die Prozentschreibweise wird häufig zum anschaulichen Vergleich von Anteilen verwendet. Kleinere Anteile werden auch in Promille(=Tausendstel) angegeben: 8 Promille = $8\,{}^0/_{00} = \frac{8}{1000} = 0{,}008$

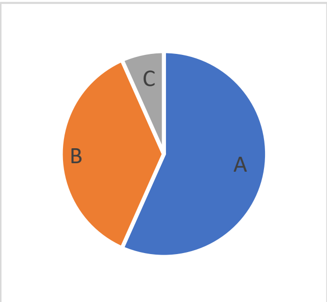
Darstellung in Diagrammen

Anteile lassen sich gut durch Diagramme veranschaulichen. Bei einem **Kreisdiagramm** entspricht die Größe des Mittelpunktswinkels dem jeweiligen Anteil, beim **Streifendiagramm** entspricht die Länge der Abschnitte dem jeweiligen Anteil, bei einem **Säulendiagramm** entspricht die Höhe der Säule dem jeweiligen Anteil. Ein **Balkendiagramm** ist ein gedrehtes Säulendiagramm.

Bsp.: Klassensprecherwahl, insgesamt 30 Stimmen.

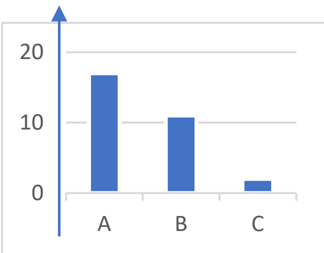
Kandidat	A	B	C
Stimmenzahl	17	11	2
Anteil	$\frac{17}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{2}{30}$
Winkel	204°	132°	24°

Kreisdiagramm:



Streifendiagramm:

Säulendiagramm:



Relative und absolute Häufigkeiten

Eine absolute Häufigkeit entspricht einer Anzahl.
Bsp.: „**17** der 30 Kinder der Klasse haben für Kandidat A gestimmt.“ Hier ist 17 die absolute Häufigkeit der Wähler von A.

Die zugehörige relative Häufigkeit ist der Anteil der absoluten Häufigkeit an der Gesamtzahl und wird oft in Prozent angegeben:

$$relative\ Häufigkeit = \frac{absolute\ Häufigkeit}{Gesamtzahl}$$

Bsp.: $relative\ Häufigkeit = \frac{17}{30} \rightarrow \frac{17}{30}$ der Kinder haben für A gestimmt. Das sind ungefähr 57% der Klasse (Rechne $17:30 \approx 0{,}57$)

Berechnung von Prozentwert und Prozentsatz

Grundgleichung der Prozentrechnung:

$$„\boldsymbol{Prozentsatz \cdot Grundwert = Prozentwert}“$$

Zur Berechnung des Prozentwertes wird der Prozentsatz mit dem Grundwert multipliziert.

Bsp: Berechne 18% von 350m: $0{,}18 \cdot 350\text{m} = 63\text{m}$

Zur Berechnung des Prozentsatzes wird der Prozentwert durch den Grundwert dividiert.

Bsp: Wie viel Prozent von 25kg sind 15kg? $15 : 25 = 0{,}6 = 60\%$

Berechnung des Grundwertes

1. Möglichkeit: Dividiere den Prozentwert durch den Prozentsatz
2. Möglichkeit: Rechne mit dem Dreisatz

Bsp: 30% von wie viel € sind 270€?
1) 270:0,3 = 900 => Grundwert: 900€
2) 30 % = 270 €, 1% = 270 € : 30 = 9 €, 100 % = 900 €

Entscheidend für den korrekten Umgang mit Prozentangaben ist, auf welchen Grundwert sich die gegebenen Angaben beziehen!
Bsp.:

- Ein Ball kostete 40 Euro, der Preis wurde um 25% erhöht und kostet jetzt 50 Euro. → Grundwert: 40 Euro
- Ein Ball kostete 50 Euro, der Preis wurde um 20% auf 40 Euro reduziert. → Grundwert: 50 Euro

Prozentdarstellungen beurteilen

Bei der Darstellung von Daten in Diagrammen wird oft „gemogelt“, um beim Leser einen bestimmten Eindruck hervorzurufen. Solche verfälschten Darstellungen können z.B. vorliegen, wenn …

- … eine Achse nicht bei 0 beginnt oder
- … nur ein bestimmter Teil der Daten dargestellt wird.

Arithmetisches Mittel

Das arithmetische Mittel (Alltagssprache: Durchschnitt, Mittelwert, Mittel) wird folgendermaßen berechnet: $\frac{Summe\ der\ einzelnen\ Werte}{Gesamtzahl\ an\ Werten}$

Bsp.: Schüler X misst die Lufttemperatur über eine Schulwoche:

Mo	Di	Mi	Do	Fr
17°	19°	13°	12°	15°

Das arithmetische Mittel ist: $\frac{11°+19°+13°+12°+15°}{5} = \frac{70°}{5} = 14°$